DEFINICIÓ DE FORÇA I MASSA EN LA MECÀNICA CLÀSSICA I LA SEUA RELACIÓ AMB LES LLEIS DE NEWTON

En los libros elementales de física se suele decir que las magnitudes fundamentales son longitud, tiempo y masa, a las que se suele añadir la carga eléctrica y otras menos usadas. Sin embargo, como veréis, la cosa no es tan sencilla. Las controversias fundamentales se producen en torno a los conceptos de fuerza y masa, y al estatus epistemológico de la segunda ley de Newton: para algunos autores, dicha ley sería simplemente una definición de fuerza. Para otros, se trata de una auténtica ley de la naturaleza. Incluso algunos postulan que tanto la fuerza como la masa son magnitudes primitivas. He revisado el material que he encontrado sobre el tema y he intentado sacar mis propias conclusiones, que me gustaría contrastar con otras personas interesadas.

El programa de Mach: la força, definida per la segona llei de Newton

Una vegada acceptades com a fonamentals les magnituds longitud i temps, i fixat un sistema de referència, queda definida la posició de la partícula material respecte al dit sistema. A continuació, definim, com es fa habitualment, la velocitat $\boldsymbol{v}$ i l'acceleració $\boldsymbol{a}$ com a derivades primera i segona del vector de posició. Cal tenir en compte que $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{a}$ són magnituds vectorials; tanmateix, en aquest treball ens reduirem principalment al moviment en una dimensió, per la qual cosa prescindirem sovint de la notació vectorial.

Però per a donar un pas més i definir la massa i la força, cal adoptar algunes precaucions. En primer lloc, cal distingir entre *massa inercial* (la magnitud que apareix en la segona llei de Newton) i *massa gravitacional* (la que apareix en la llei de la gravitació universal, també de Newton). En aquest treball, considerarem la massa com a constant, limitant-nos a les condicions de la mecànica clàssica de la partícula, i usarem *cos* (en el sentit de cos puntual) com a sinònim de *partícula*.

En alguns textos de física (Alonso i Finn 1a ed., Martínez Sancho, Tipler 3a ed., Marion, Rañada) se sol definir la massa (inercial) a partir de la interacció mútua entre dos cossos. Coneguda la massa del cos patró (m_P) fixat com a unitat de massa, la massa m de qualsevol altre cos de prova es pot determinar segons l'equació:

$$m = - m_P a_P / a \qquad (1)$$

on a i a_P són, respectivament, les acceleracions lineals del cos incògnita i del cos patró quan aquests interaccionen. Aquesta equació es pren com a definició "operacional" o "operativa" de massa (inercial).

La definició de massa (1) es basa en l'observació que, per a cada parell de cossos en interacció mútua, es verifica que $m_1 \cdot a_1 = - m_2 \cdot a_2$, expressió equivalent a la tercera llei de Newton. Si suposem ja definida la massa, aquesta propietat es pot derivar com a conseqüència del principi de conservació de la quantitat de moviment. Efectivament, si definim el vector quantitat de moviment $\boldsymbol{p}$ com a $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, aquest principi s'expressarà, per a moviment rectilini, com a $mv + m_P v_P = constant$, i derivant aquesta expressió respecte al temps obtindrem (1).

Cal plantejar-se en quin sistema es mesuren les acceleracions de (1). Aquesta equació només és aplicable per a definir la massa si mesurem les acceleracions en el sistema centre de masses (CM), on la quantitat del moviment total del sistema és, per definició, zero, o bé en un sistema inercial. Però no podem aplicar directament l'equació en el sistema CM, ja que la definició del CM requereix la determinació prèvia de la massa m, que és el que volem calcular. D'altra banda, si intentem mesurar la relació de masses en un sistema no inercial, hi apareixerà l'acceleració d'inèrcia a_I (que, si suposem per simplificar que els eixos no giren, serà la mateixa per a les dues partícules), de manera que les acceleracions observades de cada partícula seran $a_P' = a_P - a_I$ per al cos patró, i $a' = a - a_I$ per al cos de prova. Per tant, si intentem aplicar (1) amb la relació d'acceleracions en un sistema no inercial obtindrem, per a la partícula de prova, una massa $m' = -m_P a_P'/a' = - m_P (a_P - a_I) / (a - a_I)$, diferent de l'obtinguda en el sistema inercial. Per tant, per a una correcta definició de la massa necessitem prèviament una definició de sistema inercial.

Per tant, les acceleracions de (1) s'han de mesurar en un sistema inercial, que es defineix com un sistema vinculat a un cos no subjecte a interaccions amb altres cossos i els eixos del qual no giren; en aquest sistema, l'equació (1) és conseqüència directa de la tercera llei de Newton.

Pel que fa a la força, en els textos de física se la reconeix, en general, com a expressió matemàtica d'una interacció entre cossos. Tanmateix, en alguns manuals clàssics (Resnick & Halliday, Alonso & Finn 1a ed., Martínez Sancho, Tipler 3a ed., Burbano de Ercilla, Marion, Rañada) se la defineix explícitament a partir de la segona llei de Newton, per mitjà de l'equació (suposant que la massa és constant)

$$F = ma \qquad (2)$$

o bé mitjançant l'equació més general $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$. Per tant, en aquests textos la segona llei de Newton és considerada no com una llei de la naturalesa, sinó com una definició de força. El descobriment de Newton comportaria només, doncs, que aquest concepte expressa d'una manera coherent la interacció entre cossos.

Segons aquest programa, la primera llei de Newton seria una conseqüència de la definició de força, mentre que la tercera seria una conseqüència del principi de conservació de la quantitat de moviment.

El programa establert, que procedeix del científic i filòsof empirista Ernst Mach, amb un precedent en Barré de Saint-Venant (v. Coelho), té, però, algunes dificultats, i és durament criticat, des del punt de vista del realisme epistemològic, per Mario Bunge, i per altres autors (Feynman, Roche). En primer lloc, l'equació (1) no és suficientment general: no és aplicable a cossos no accelerats, als quals no podríem assignar-los una massa.

A més, com que és equivalent a la tercera llei de Newton, només és aplicable en el cas d'interaccions instantànies, ja que, tot i que és conseqüència de la llei de conservació de la quantitat de moviment, no té en compte la quantitat de moviment que es desplaça entre les partícules en interacció quan la interacció no és o no pot considerar-se instantània.

Per tant, l'equació (1) no pot considerar-se una definició, sinó un procediment per a mesurar la massa en un cas particular. La massa (inercial, en aquest cas) és una propietat objectiva de les partícules, independentment de la manera com es puga mesurar o del fet que aquestes partícules estiguin accelerades o no.

R. Coelho critica també el "programa" de Mach partint de la llei de la inèrcia, que indica que un cos lliure manté el seu estat de repòs o moviment rectilini uniforme. Aleshores, si hi ha acceleració, cal concloure que el cos no és lliure, és a dir, que alguna cosa actua sobre el cos. Aquesta cosa rep el nom de *força* en mecànica. Per tant, la força és necessària perquè hi hagi una acceleració. Aleshores, no és lògicament acceptable començar per l'acceleració per a definir la massa, i d'ací definir la força. Observem que si la segona llei de Newton fos una mera definició de força, la força ja no podria considerar-se la causa de l'acceleració, i la llei de la inèrcia ja no podria presentar-se com una conseqüència de la segona llei, sinó que hauria enunciar-se de manera independent d'aquesta.

D'altra banda, com indica J. Roche, una definició de la força a partir de l'equació (2) només es referiria a la força total que actua sobre una partícula, i no ens informaria sobre cadascuna de les forces particulars que expressen la interacció amb cossos diversos, ni ens estalviaria la necessitat de definir-les i caracteritzar-les independentment. És a dir, el que en realitat expressa la segona llei de Newton és que $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 + \ldots = m\boldsymbol{a}$, on les $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \ldots$ són l'expressió matemàtica de cadascuna de les interaccions a què es veu sotmès el cos. El principi de superposició de forces ens diu que l'acció conjunta de totes aquestes forces és equivalent a l'acció d'una única força que seria la seua suma vectorial, és a dir $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 + \ldots = \boldsymbol{F}$, on $\boldsymbol{F}$ és ara la força resultant, però la segona llei de Newton no ens permet deduir quines forces individuals actuen sobre el cos. La inadequació de (2) com a definició de força queda especialment palesa en estàtica, quan la força resultant sobre un cos és nul·la i, per tant, l'acceleració és zero; però això no implica que no hi actuen forces.

Com hem dit anteriorment, la llei de conservació de la quantitat de moviment, i l'equació (1) que se'n deriva, només son aplicables si mesurem les acceleracions en el sistema centre de masses (on la quantitat del moviment total del sistema és, per definició, zero), o bé en un sistema inercial. Aleshores topem amb la dificultat d'establir una definició prèvia correcta de sistema inercial. La definició que hem donat d'un sistema inercial, com "un sistema vinculat a un cos no subjecte a interaccions amb altres cossos" inclou el concepte d'interacció, matemàticament expressat com una força. Per tant, si es defineix la força mitjançant l'equació (2), ens trobem amb una situació circular: no podem definir la força mitjançant l'equació (2), que es dóna per a sistemes inercials, perquè prèviament ha intervingut el concepte de força (interacció) en la definició de sistema inercial, com a sistema lliure d'interaccions. A més, si (2) s'estableix com a definició de força, com a tal definició no podria ser verificada o falsada experimentalment; seria vàlida en tots els sistemes de referència, i es difuminaria la distinció essencial entre forces reals, que corresponen a interaccions entre cossos, i forces fictícies, introduïdes *ad hoc* en sistemes no inercials per a fer que es compleixi la fórmula (2).

Hi hauria, encara, una altra possibilitat: la de definir els sistemes inercials en funció de la radiació de fons de microones que ompli l'univers. Per exemple, seria un sistema inercial aquell en què la radiació de fons de microones és isòtropa, i també tots els sistemes que es mouen amb moviment rectilini i uniforme respecte a aquest; o bé, seria inercial un sistema en el qual la radiació de fons té una anisotropia constant. Amb aquesta definició, podríem considerar de nou la segona llei de Newton com a definició de força. Tanmateix, aquesta alternativa no faria justícia a la realitat històrica del descobriment de Newton ni al concepte original de sistemes inercials, ni tampoc se superarien les altres dificultats indicades en els paràgrafs anteriors. Resulta, doncs, preferible, definir els sistemes inercials com han estat definits històricament (és a dir, com a sistemes on es compleixen les lleis de Newton), deduir la isotropia de la radiació de fons en els sistemes inercials com a conseqüència de les altres lleis de la física o del principi d'isotropia de l'espai, i buscar una definició o caracterització alternativa de força.

De fet, Feynman *et al.* neguen explícitament que la segona llei de Newton sigui una definició, i fins i tot que la força pugui ser definida de manera precisa: «"If a body is accelerating, then there is a force on it." That is what Newton's laws say, so the most precise and beautiful definition of force imaginable might simply be to say that force is the mass of an object times the acceleration. Suppose we have a law which says that the conservation of momentum is valid if the sum of all the external forces is zero; then, the question arises: "What does it *mean*, that the sum of all the external forces is zero?" A pleasant way to define that statement would be: "When the total momentum is a constant, then the sum of external forces is zero." There must be something wrong with that, because it is not saying anything new. If we have discovered a fundamental law, which asserts that the force is equal to the mass times the acceleration, and then *define* the force to be the mass times the acceleration, we have found out nothing. We could also define force to mean than a moving object with no force acting in it continues to move with constant velocity in a straight line. If we then observe an object *not* moving in a straight line with a constant velocity, we might say there is a force on it. Now such things certainly cannot be content of physics, because there are definitions going in a circle. The Newtonian statement above, however, seems to be a most precise definition of force, and one the appeals to the mathematician; nevertheless, it is completely useless, because no prediction whatsoever can be made from a definition. [...] One of de most important characteristics of force is that it has a material origin, an this is not just a definition. [...] If you insist upon a precise definition of force, you will never get it!».[1] (12.1).

[1] «"Si un cuerpo está acelerando, entonces una fuerza actúa sobre él". Eso es lo que dicen las leyes de Newton, de manera que la más precisa y bella definición de fuerza imaginable puede [*sic.*; la meua traducció seria 'podría'] decir sencillamente que fuerza es la masa de un objeto multiplicada por la aceleración. Suponga que tenemos una ley que diga que la conservación del momentum ['quantitat de moviment'] es válida si la suma de todas las fuerzas externas es cero; entonces surge la pregunta: "¿Qué

Tampoc no serviria l'alternativa de considerar la força com a magnitud primitiva i intentar definir la massa com a magnitud derivada per mitjà de l'equació (2). Igualment que en el programa de Mach, aquesta equació no es pot aplicar a cossos no accelerats, als quals, si l'equació fos una definició, no hi hauria possibilitat d'assignar-los una massa. La massa inercial és una propietat característica i intrínseca dels cossos que es manifesta com a resistència a la variació de la velocitat en qualsevol mena d'interaccions; per tant, es pot considerar com un concepte primitiu que no deriva del concepte de força.

Qualsevol intent, doncs, de definir la força o la massa l'una a partir de l'altra segons la segona llei de Newton comporta dificultats, i menysté el descobriment de Newton en el sentit que cada partícula experimenta acceleracions proporcionals a la força (o forces) que s'hi apliquen, i que una mateixa força origina acceleracions inversament proporcionals a la massa de les partícules a què s'aplica.

La segona llei de Newton, com a autèntica llei de la naturalesa

Naturalment, no tots els autors estan d'acord amb la concepció exposada en els paràgrafs anteriors. En la majoria de manuals i articles consultats (Catalá, Feynman *et al.*, Strelkóv, French, Alonso & Finn 2a ed., Tipler & Mosca, Shankar, Young & Freedman, Serway & Jewett, Hewitt, Lea & Burke; Moore, Coelho, Roche) es caracteritza la força com a mesura d'una interacció, i s'insisteix que la força és la causa del canvi de moviment dels cossos. La massa (inercial) és una mesura de la inèrcia o resistència al canvi de repòs o moviment, característica de cada cos. La segona llei de Newton apareix com a una autèntica llei fàctica (encara que no s'expliciti aquesta condició), tot i que es defineix la unitat de força a partir de les de distància, temps i massa.

Observem que l'equació (2) ens proporciona un mitjà per a comparar la massa d'un cos amb la d'un altre de triat com a patró (Reisnick & Halliday, Strelkóv, French, Tipler & Mosca, Shankar, Young & Freedman; Serway & Jewett): si, situat en un determinat medi amb què interactua, medi caracteritzat per una determinada força que pot ser desconeguda, la

---

significa que la suma de todas las fuerzas externas sea cero?" Una forma cómoda de definir esa afirmación sería: "Cuando el momentum total es una constante, la suma de las fuerzas externas es cero". Debe haber algo erróneo en eso, porque, simplemente, no dice nada nuevo. Si hemos descubierto una ley fundamental que afirma que la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración, y después se *define* que la fuerza es masa por aceleración, no hemos averiguado nada. Podríamos también definir la fuerza diciendo que un objeto en movimiento sobre el cual no actúan fuerzas continúa moviéndose con velocidad constante en línea recta. Entonces, si observamos que un objeto *no* se mueve en línea recta con velocidad constante, podríamos decir que actúa una fuerza sobre él. Ahora, tales cosas verdaderamente no pueden ser el contenido de la física, porque son definiciones que van en círculo vicioso. Sin embargo, la aseveración newtoniana precedente parece ser una definición muy precisa de fuerza, y una que atrae al matemático; sin embargo, es completamente inútil, porque de una definición no puede hacerse predicción alguna. [...] Una de las características más importantes de una fuerza es que tiene un origen material, y esto no es meramente una definición. [...] Si insisten en una definición precisa de fuerza, ¡nunca la tendrán! [Extret de la versió espanyola en l'edició bilingüe].

massa patró m_p és accelerada amb una acceleració a_p, i un altre cos, en el mateix medi i per tant sotmès a la mateixa força, experimenta una acceleració a, com que, en virtut de (2), és $ma = m_p a_p$, la massa del segon queda mesurada com a $m = m_p a_p / a$.

Notem, però, que aquest mètode no serveix per a definir la força que actua per mitjà de (2), ja que prèviament hem acceptat (2) com a fet experimental que ens ha servit per a mesurar la massa, i no com a definició. Certament, la unitat de força es defineix com la força que actua sobre la unitat de massa produint una acceleració unitat. Tanmateix, això no és equivalent a una definició de la força com a magnitud; la caracterització de la segona llei de Newton com a vertadera llei de la naturalesa (el fet que les forces són causa de les acceleracions, i que les acceleracions produïdes en cada cos són proporcionals a les forces exercides) exigeix una avaluació independent de la força per a cada cas, proporcionada per les lleis de les forces.

En canvi, una vegada acceptada la llei de Newton com a llei de la naturalesa, el valor de la massa obtingut per aquest mètode sí que ens serveix per a calcular l'acceleració a que adquirirà una partícula una vegada coneguda la força F; o bé, en sentit contrari, una vegada coneguda la massa del cos, per a deduir la força que actua si coneixem l'acceleració.

En realitat, la segona llei de Newton ens descriu el fet fàctic segons el qual la força total, determinada pel medi en què es troba el cos, és proporcional tant a la massa, propietat característica del cos, com a l'acceleració. Això esdevé clar si l'escrivim (v., per exemple, Strelkóv, p. 69):

$$F = kma \quad (3)$$

En el nostre sistema d'unitats, hem decidit assignar a k el valor 1. Aleshores, si coneixem la massa i l'acceleració, podem assignar un valor determinat a la força; en cas que coneguem la força i l'acceleració, podem donar un valor a la massa del cos. Això ens permet definir una unitat de força en funció de les unitats de massa i d'acceleració. Però això no és una definició de la massa ni de força com a magnituds, sinó una propietat del nostre sistema d'unitats.

És significatiu, en aquest sentit, el canvi que ha experimentat el tractament del concepte de força i la segona llei de Newton en un dels manuals més populars de física, el de M. Alonso i E. J. Finn, entre la primera edició, en tres volums, i la segona, en un únic volum. En la primera edició, la massa era definida de manera "operacional" per mitjà de l'equació (1). En canvi, en la segona edició, tot i que es descriu el dit procediment com un mitjà per a comparar masses, no es menciona que sigui una definició: havent distingit explícitament entre massa inercial i massa gravitacional, es diu que la massa és "una propiedad fundamental de la materia" que es caracteritza de la següent manera: «La masa inercial de una partícula es una propiedad que determina cómo cambia su velocidad cuando interactúa con otros cuerpos» (p. 81). Quant a la força, en la primera edició es definia com "el cambio respecto al tiempo del momentum de una partícula" per mitjà de l'equació $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, i la segona llei de Newton era "més una definició que una llei" (vol. I, p. 164). En canvi, en la segona edició, la força és introduïda com a expressió quantitativa d'una interacció (p. 78). La força està relacionada amb la taxa de canvi de la quantitat de moviment per mitjà de l'expressió $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ (segona llei de Newton). Textualment, «la tasa de cambio del momentum de una partícula con respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula. Dicho de otra manera: la fuerza que actúa sobre una partícula determina la tasa de cambio de su momentum. [...] La segunda ley del movimiento formulada por Newton **no** es solo una definición de fuerza...» (p. 88; la negreta és meua).

Igualment significatiu és el canvi que s'observa entre Tipler, 3a ed., i Tipler & Mosca, 6a ed. En Tipler, 3a ed., es definia la força a partir de la segona llei de Newton ($F = ma$), però després s'usava el concepte de força per a definir la massa: la relació entre les masses de dos cossos sotmesos a la mateixa força $F = a_1m_1$ i $F = a_2m_2$ s'estableix per comparació de les acceleracions que adquireixen; és tractava, doncs, d'un raonament circular. En canvi, en Tipler & Mosca, 6a ed., una vegada enunciada la llei de la inèrcia, es defineix la força com una influència o acció externa sobre un objecte que fa que canviï la seua velocitat, és a dir, que acceleri respecte a un sistema inercial. Les forces són exercides per objectes sobre altres objectes, i es poden reduir a les quatre forces fonamentals de la natura. La massa es defineix com la propietat intrínseca dels cossos que mesura llur inèrcia, o resistència a ser accelerats. La segona llei de Newton s'enuncia dient que l'acceleració d'un objecte és directament proporcional a la força resultant aplicada, i inversament proporcional a la seua massa. Una força neta sobre un objecte li provoca una acceleració. Es tracta d'un assumpte de causa i efecte: la força resultant és la causa, i l'acceleració és l'efecte. Les masses es poden mesurar aplicant la mateixa força sobre cossos distints i comparant llurs acceleracions, segons hem descrit anteriorment.

El caràcter experimental de la segona llei de Newton ve reforçat si acceptem com a axiomes els principis de superposició de les masses i de les forces: podem comprovar experimentalment que un mateix cos adquireix una acceleració doble si el sotmetem a una força doble (per exemple, lligant-lo a dos molls idèntics), i una massa doble (per exemple, la formada per dues partícules idèntiques) s'accelera en magnitud igual a la meitat de la que adquireix una sola partícula.

La força i la massa, com a magnituds primitives

Alguns autors (Bunge, Symon, Alemañ *et al.*, Hestenes) han fet un pas més enllà, considerant el concepte de *força* com a primitiu, com a expressió matemàtica d'una interacció, juntament amb el concepte també primitiu de *massa inercial*, com a propietat escalar de les partícules. Notem, però, que la força podria considerar-se un concepte primitiu en mecànica clàssica de partícules, encara que seria derivat, en altres marcs teòrics, dels conceptes més bàsics de camp i potencial. Segons això, la segona llei de Newton seria una veritable llei de la naturalesa que expressa una relació entre magnituds primitives. La primera llei de Newton, en canvi, seria una conseqüència de la segona, i la tercera llei, una conseqüència del principi de conservació de la quantitat de moviment, més fonamental y general que la mateixa tercera llei.

D. Hestenes distingeix entre dues classes de definicions: definicions explícites i implícites. Un concepte pot ser definit explícitament quan és expressat en termes d'altres conceptes; p. ex., l'energia cinètica, que es defineix com a $K = mv^2/2$. Un concepte o terme pot ser definit implícitament per una sèrie d'axiomes (en física serien lleis axiomàtiques) que el relacionen amb altres conceptes; per exemple, el punt és definit pels axiomes de la geometria, que el relacionen amb altres conceptes com recta, pla..., i un vector és definit pels axiomes de l'espai vectorial que indiquen com sumar vectors o multiplicar vectors per un escalar. Comunament es diu que termes com *punt* o *vector*, introduïts per axiomes, són termes no definits, però segons l'autor aquesta és una expressió desafortunada que ha de ser rebutjada. Més que dir que "alguns termes de la teoria han de ser no-definits", caldria dir que "alguns termes d'una teoria han de ser definits implícitament". Des d'aquest punt de vista, la força és definida implícitament per les tres lleis del moviment de Newton, que descriuen conjuntament les seues característiques, de la mateixa manera que la massa inercial és definida implícitament per la segona llei de Newton. En aquest sentit, tant la força com la massa inercial podrien definir-se implícitament a partir de lleis físiques, però això no els treu la seua caracterització com a magnituds primitives.

Proposta: la força, definida per les lleis de les forces

Com a conclusió, considero que és justa la crítica de Bunge i altres autors a la teoria de Mach, teoria segons la qual la massa es defineix a partir de la interacció entre dos cossos i la segona llei de Newton queda reduïda a una definició de força. Tanmateix, la consideració de la força com a magnitud primitiva de la teoria planteja també algunes dificultats.

En primer lloc, la unitat de força es defineix de manera indefectible en funció de les unitats de massa i acceleració; per exemple, en el SI, el newton es defineix com a la força que cal per a imprimir a un cos de massa 1 kg una acceleració d'1 m s^{-2}. És difícil de conciliar la noció d'una magnitud primitiva amb una unitat derivada.

D'altra banda, es poc satisfactori que una mateixa equació (2) relacioni o defineixi implícitament (Alemañ, Hestenes) dues magnituds fonamentals —la força i la massa—, pels perills de circularitat que això suposa. Sembla clar que no podem conformar-nos amb caracteritzacions generals del tipus "força és la causa del canvi de l'estat de repòs o moviment d'un cos" o "massa és una mesura de la inèrcia o resistència d'un cos al canvi del seu estat de repòs o moviment", relacionant-les únicament per mitjà de (2), ja que la quantificació de la massa dependria de la quantificació de la força, i a l'inrevés.

A més, el concepte de força, com a magnitud primitiva, hauria d'aparèixer tant en les lleis generals del moviment com en les lleis particulars de les forces, la qual cosa ens porta a pensar que es produeix una caracterització redundant. La força apareix en la segona llei de Newton com a causa de l'acceleració o del canvi de la quantitat de moviment d'un cos:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \; (= m_i \, d\mathbf{v}/dt = m_i\mathbf{a}) \quad (4)$$

On m_i és la massa inercial del cos, suposada constant i característica de cada cos, i **F** és la força neta, resultant de totes les que actuen sobre la partícula. Si considerem moviment rectilini, obtenim (2): $F = ma$ (on m indica ací massa inercial).

Tanmateix, aquesta llei manca de contingut i és inaplicable si no tenim una manera independent de quantificar el primer membre de l'equació, és a dir, la força neta. Suposem, per exemple, que volem comprovar experimentalment la validesa de (4) amb forces de les quals no coneixem les funcions que les expressen, és a dir, "les lleis de les forces". Per a això, hem de poder comparar forces desconegudes. Una determinada força f_1 produeix una acceleració a_1 sobre un cos de massa m, i, si es compleix (4), ha de ser $f_1 = m \cdot a_1$. Com podríem saber, sense recórrer a (4), que una altra força f_2, també desconeguda, de naturalesa distinta, és igual a f_1? No podem conformar-nos amb el fet que f_2 produeixi sobre la massa m la mateixa acceleració que f_1 per a deduir que $f_2 = f_1$, ja que això suposaria que hem aplicat (4): "Com que $f_2 = m \cdot a_1$, aleshores $f_2 = f_1$". Podem intentar equilibrar-les, és a dir, aplicar-les a un cos qualsevol, per exemple, al mateix que hem utilitzat, de massa m, o a qualsevol altre, en la mateixa recta i en sentit contrari, i verificar que f_2 anul·la f_1; és a dir, comprovar que, aplicades conjuntament, el cos té una acceleració nul·la. Però per a deduir d'això que $f_2 = f_1$ hauríem d'aplicar de nou (4): "Com que $f_2 - f_1 = m \cdot 0 = 0$, aleshores $f_2 = f_1$". Observem que podem deduir també $f_2 = f_1$ directament de la primera llei de Newton, però recordem aquesta es dedueix de la segona llei de Newton, si no és que volem establir-la de manera independent; però per a això necessitaríem ja el concepte de força, i ens trobem de nou en un cercle viciós. Si per aquest mètode de comparació directa no podem determinar ni tan sols la igualtat entre dues forces, com podríem obtenir la relació entre f_1 i una altra força f_3 de valor desconegut, per a poder usar la llei de Newton?

Un altre mètode per a determinar la igualtat de forces, o bé el quocient desconegut entre els mòduls de dues forces, seria comparar les forces desconegudes amb unes altres el valor de les quals sí que coneixem. Per exemple, podem deduir que f_2 és igual a f_1 si, aplicades a una molla de constant k coneguda, hi produeixen el mateix allargament. I si f_1 produeix sobre la molla un allargament x_1, mentre que f_3 produeix sobre la molla un allargament nx_1, podem deduir que $f_3 = nf_1$. Però per a això necessitem aplicar la llei de Hooke, que ens diu que l'allargament produït per una força en una molla és proporcional a la força aplicada. És a dir, necessitem conèixer la llei de la força. Veurem més avant com aquesta llei pot ser determinada.

És a dir, per a poder comprovar experimentalment la validesa de (4), i establir-la com a llei de la natura, necessitem la llei de la força o de les forces aplicades en la comprovació experimental.

Però, precisament, el mateix Newton ens va donar una d'aquestes lleis, la de la gravitació universal, que determina la força per al cas particular de la interacció gravitacional:

$$\mathbf{F_{grav}} = -\mathbf{u_r}\, Gm_gM_g/r^2 \qquad (5)$$

On m_g és la massa gravitacional del cos considerat, M_g la massa gravitacional del cos amb què interactua, $\boldsymbol{u_r}$ un vector unitari en la direcció i sentit que va de m_g a M_g, i r la distància entre els cossos.

Considerem primer el cas en què l'única força que actua sobre el cos és la gravitatòria; aleshores, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{grav}}$. Si igualem els segons membres de (4) i (5), obtenim:

$$-\mathbf{u_r}\, Gm_gM_g/r^2 = m_i\mathbf{a} \qquad (6)$$

El contingut de l'equació (6) ens indica que la quantitat de l'esquerra, que expressa matemàticament la interacció gravitatòria, és precisament igual a la variació de la quantitat de moviment indicada en el segon membre. És a dir, unifica la segona llei de Newton, amb la llei de la gravitació universal. La llei de la gravitació universal quantifica la interacció que produeix com a efecte un canvi determinat en la quantitat de moviment, i proveeix de contingut la segona llei de Newton.

Tenint en compte la proporcionalitat entre massa inercial i massa gravitacional (o igualtat, si elegim adequadament les unitats), podem escriure:

$$-\mathbf{u_r}\, GM/r^2 = \mathbf{a} \qquad (7)$$

Aquesta equació, aplicada convenientment a la caiguda de la poma i al moviment de la Lluna, és la que va permetre a Newton, tot i que no coneixia G ni M, comparar l'acceleració de la gravetat terrestre i l'acceleració centrípeta de la Lluna per verificar experimentalment la seua llei de la gravitació universal: en efecte, dividint entre sí les expressions de (7) per als mòduls de l'acceleració centrípeta de la Lluna ($a_c = GM/r_L^2$) i l'acceleració de la poma en la superfície de la Terra, ($g = GM/R^2$), s'obté $a_c = (R/r_L)^2g$, on R és el radi de la Terra i r_L és la distància entre la Lluna i el centre de la Terra, relació que es comprova aplicant les dades numèriques corresponents. Es tracta, per tant, d'una llei fàctica. Observem que aquesta verificació no hauria estat possible si solament haguéssim partit de (4).

L'equació (7), en la qual no figura la magnitud força, és l'equació fonamental que ens permet resoldre els problemes de moviment dels cossos celestes, caiguda de greus, etc., i podria ser adoptada com a axioma per a una mecànica newtoniana que només tingués en compte la interacció gravitatòria, en compte de les dues lleis expressades anteriorment. Per tant, és difícil d'acceptar que una magnitud que pot ser eliminada tan fàcilment dels axiomes pugui ser considerada una magnitud fonamental.

Tanmateix, la magnitud força és útil per a caracteritzar la interacció entre cossos. Podem introduir-la com a denominació abreujada d'un dels dos membres de l'equació fonamental (6). Ja hem comentat els problemes que planteja considerar la segona llei de Newton com a definició de força; entre aquests, que per aquest mitjà només podríem definir la força neta que actua sobre la partícula, en cas de concurrència de diverses forces. Per tant, proposem definir la força gravitatòria segons l'equació (5), com a expressió matemàtica de la interacció gravitatòria, i, una vegada quantificada la força, considerem (4), la segona llei de Newton, com a autèntica llei fàctica, per mitjà de la qual queda determinada implícitament la massa com a constant de proporcionalitat entre la força aplicada i l'acceleració que la partícula adquireix. Cal aclarir que l'equació (4) no és tampoc una definició explícita de la massa en funció de la força: la massa és una propietat intrínseca de cada partícula, una magnitud primitiva que quantifica la seua inèrcia, o tendència a conservar el seu estat de repòs o de moviment.

Perquè aquesta definició de força gravitatòria tingui sentit, tots els elements del segon membre de (5) han de ser magnituds primitives o estar prèviament definits. Així és, ja que la massa gravitacional és una magnitud primitiva que queda definida implícitament pel principi d'equivalència, que estableix la seua proporcionalitat (o la seua igualtat, segons el sistema d'unitats triat) respecte a la massa inercial; la distància és una magnitud primitiva, y G és una constant de proporcionalitat que dependrà del sistema d'unitats elegit.

Podríem pensar que aquesta definició buida de contingut la llei de la gravitació universal. Tanmateix, considero que l'autèntic valor d'aquesta llei consisteix en el fet que el segon membre de (5) expressa matemàticament de manera exacta la interacció gravitatòria entre dos cossos. Aquesta expressió rep el nom de *força gravitatòria*, i, portada al primer membre de (4), ens determina el canvi de moviment de la partícula expressat en (6). La definició de força gravitatòria no és, doncs, arbitrària: qualsevol altra definició faria que, en absència d'altres forces, l'equació (4) fos falsa.

La formulació de la llei de gravitació universal, com a llei fàctica, podria enunciar-se també així: «La quantitat $-\mathbf{u}_{\mathbf{Mm}}\, Gm_gM_g/r^2$ causa, en absència d'altres interaccions, una variació de la quantitat de moviment igual a $d\mathbf{p}/dt$; aquesta quantitat rep el nom de *força gravitatòria*, la qual, per tant, és directament proporcional a les masses gravitatòries dels cossos que intervenen i inversament proporcional al quadrat de la distància».

En cas que, en lloc de la gravitatòria o a més d'aquesta, hi hagi altres interaccions entre partícules, per a cada interacció afegida caldrà trobar una expressió adequada per a portar-la al primer membre de (6), de manera que, en conjunt, ens determinin el canvi en la quantitat de moviment. És a dir:

$$\textit{expressió interacció 1} + \textit{expressió interacció 2} + \ldots = d\mathbf{p}/dt \qquad (8)$$

Aquesta seria la equació de moviment general, en la qual tampoc no figura el concepte de força. Si una de les interaccions (per exemple, la 1) actua sola, o bé la resta s'anul·len, tindríem:

$$\textit{expressió interacció 1} = d\mathbf{p}/dt \quad (9)$$

De manera semblant al que hem fet amb la interacció gravitatòria, podríem definir un tipus de força que seria equivalent a l'expressió corresponent:

$$\mathbf{F_1} = \textit{expressió interacció 1},\ \mathbf{F_2} = \textit{expressió interacció 2}\ \ldots \qquad (10)$$

D'aquesta manera, el segon membre de cadascuna d'aquestes definicions coincideix amb el primer membre de l'expressió (9) corresponent.

Cadascuna d'aquestes lleis de les forces seria, doncs, una llei fàctica expressada en la forma (9), ja que identificaria l'expressió que, portada al primer membre de (8), ens donaria la variació de quantitat de moviment correcta. Al mateix temps, escrita en la forma (10), seria una definició de la força corresponent, com a expressió matemàtica de la interacció de què es tracta.

Amb aquestes definicions de forces parcials, i tenint en compte el principi de superposició de forces —que ja hem tingut en compte enunciant (8)—, quedaria:

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \ldots = \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \qquad (11)$$

On $\boldsymbol{F}$ és la força neta, resultant de totes les interaccions. Aquesta és la forma usual de la segona llei de Newton.

Per exemple, podem establir la validesa de la llei de Hooke penjant d'una molla diversos cossos de masses conegudes m_1, m_2... i comprovant que els allargaments produïts, x_1, x_2..., una vegada assolit l'equilibri, són tals que $0 = m_1g - kx_1 = m_2g - kx_2 = \ldots$ Alternativament, podem enganxar els cossos a la molla estirada o comprimida horitzontalment sobre una superfície sense fricció (la força gravitatòria i la força normal s'hi anul·len), i comprovar que les acceleracions adquirides pels cossos són tals que $m_1a_1 = -kx_1$, $m_2a_2 = -kx_2$, etc. Observem que en aquestes equacions de moviment no hi figura cap magnitud força. Aleshores obtenim, com a llei fàctica, quan no actuen altres forces o aquestes s'anul·len:

$$-k\mathbf{r} = d\mathbf{p}/dt$$

Definim ara la força elàstica per mitjà de l'expressió:

$$\mathbf{F}_{\text{elàstica}} = -k\mathbf{r}$$

Podem expressar la llei de Hooke també així: «La quantitat $-k\boldsymbol{r}$ causa, en absència d'altres interaccions, una variació de la quantitat de moviment igual a $d\boldsymbol{p}/dt$; aquesta quantitat rep el nom de *força elàstica*, la qual, per tant, és directament proporcional al desplaçament provocat en la molla i de sentit contrari a aquest desplaçament».

Les lleis de les forces són, doncs, lleis fàctiques si les expressem de manera que en un membre de l'equació que les enuncia hi figuri el segon membre de la segona llei de Newton, i en l'altre, l'expressió corresponent que descriu matemàticament la interacció. En canvi, l'equació que iguala aquesta expressió matemàtica al símbol de força és una definició de la força corresponent.

Observem que, una vegada establida la validesa de la segona llei de Newton (11) per a totes les forces conegudes o ja definides, res no ens impedeix usar-la "en sentit contrari", és a dir, per a calcular el valor d'una força desconeguda a partir de l'acceleració que produeix a una massa coneguda, o bé per a determinar una nova llei de les forces.

Quant a la massa inercial, l'hem caracteritzada com a propietat d'un cos que mesura la inèrcia o resistència d'aquest cos a ser accelerat. Com a quantitat primitiva de la teoria, no pot ser definida explícitament, però és definida implícitament per la segona llei de Newton. En realitat, representa la constant de proporcionalitat, per a cada cos, que apareix en l'equació (2); aquesta equació expressa precisament la relació entre massa i acceleració per a un mateix cos. Per a cossos distints, aquesta constant de proporcionalitat pot ser mesurada per comparació entre les acceleracions experimentades, com hem indicat anteriorment.

La massa està vagament relacionada amb la quantitat de matèria d'un cos, i històricament va ser definida així en moltes ocasions. Això és degut al fet que, en mecànica newtoniana, la massa és additiva: la massa d'un sistema de dos cossos és igual a la suma de les masses dels cos cossos del sistema. Com que els cossos estan compostos per partícules, semblaria que la massa estigués determinada pel nombre de partícules components. Però aquesta concepció té diversos problemes: primer, si definim la massa en funció del nombre de partícules, ens quedaria indefinida la massa d'una única partícula, i necessitaríem caracteritzar la massa de cada tipus de partícula com una propietat intrínseca de la partícula; segon, quan hom descendeix a l'escala de partícules, l'additivitat de la massa no és exacta: quan s'uneixen, per exemple, un protó i un electró per a formar un àtom d'hidrogen, la massa d'aquest és menor que la suma de les masses del protó i de l'electró, ja que una part de la massa de les partícules s'ha esvaït en forma d'energia d'enllaç. Diguem, de pas, que el caràcter de la massa com a propietat intrínseca de les partícules o dels cossos es manté en la teoria de la relativitat, si considerem la massa en repòs com a tal propietat intrínseca.

La proporcionalitat entre massa inercial i massa gravitacional (igualtat amb una adequada elecció d'unitats: $m_i = m_g$) apareixeria com una altra llei de la naturalesa, que es pot deduir, però, del principi d'equivalència de la relativitat general. Aquesta igualtat ens permet, quan la interacció és, per exemple, entre la Terra i un cos pesant, deduir de $m_g g = m_i a$, la igualtat $g = a$, que expressa que tots els cossos cauen amb la mateixa acceleració $g = GM/r^2$ (on M és la massa de la Terra); per tant, podem avaluar la massa dels cossos comparant els pesos respectius en el camp gravitatori terrestre o en qualsevol altre.

Observem que la validesa de la segona llei de Newton i la caracterització d'aquesta com a llei de la naturalesa queda incòlume també en la teoria de la relativitat, si l'escrivim en la seua forma més general ($\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$), on el vector $\boldsymbol{p}$ és ara la quantitat de moviment relativista, definit de manera convenient perquè es compleixi la llei de conservació de la quantitat de moviment.

Pel que fa a la definició dels sistemes inercials, mantindrem com a vàlida la donada inicialment (un sistema vinculat a un cos no subjecte a interaccions amb altres cossos, expressades matemàticament com a forces, i els eixos del qual no giren); el fet que siguin també inercials tots aquells sistemes els orígens de coordenades dels quals es desplacen a velocitat relativa constant respecte a un d'inercial i els eixos dels quals no giren, es pot deduir del principi de relativitat restringida o de Galileu, segons el qual les lleis de la mecànica (concretament, les lleis de Newton), són invariants en tots els sistemes inercials. Però davant la dificultat de comprovar a priori si una partícula es troba lliure d'interaccions o no, es considerarien empíricament com a sistemes inercials aquells sistemes en què es compleixen les lleis de Newton; en canvi, en els sistemes no inercials, per a conservar formalment l'equació (2) caldria introduir en el càlcul les forces fictícies, que no serien veritables forces en el sentit que no serien expressió de la interacció entre cossos.

Programa d'axiomatització

Per a completar el procés d'axiomatització, cal recordar que, segons el teorema de Noether, cadascuna de les lleis de conservació de la mecànica es relaciona amb una simetria de l'espaitemps. Concretament, la llei de conservació de l'energia es dedueix de la homogeneïtat i isotropia del temps; la conservació de la quantitat de moviment, de l'homogeneïtat de l'espai, i la conservació del moment angular, de la isotropia de l'espai.

El programa de caracteritzacions i definicions de la nostra axiomatització seria el següent (aquesta axiomatització no pretén ser completa, sinó que tan sols vol destacar el caràcter de conceptes primitius i independents de massa inercial, massa gravitacional, etc.):

Longitud, temps

Magnituds escalars primitives, a partir de les quals triem un sistema de referència. En mecànica clàssica, t és independent del sistema de referència, mentre que en mecànica relativista sí que en depèn.

Massa inercial

Magnitud escalar primitiva. Com hem descrit, és l'escalar que expressa una propietat de la partícula que caracteritza la inèrcia o resistència al canvi de l'estat de repòs o velocitat. Pot definir-se implícitament (en el sentit de Hestenes) a partir de la segona llei de Newton i es pot mesurar en alguns casos per mitjà de les equacions (1) o (2).

Massa gravitacional

Magnitud escalar primitiva. Es una altra propietat escalar de les partícules, que intervé en la llei de gravitació. La proporcionalitat (o igualtat, si es tria adequadament el sistema d'unitats) entre massa inercial i massa gravitacional és una conseqüència del principi d'equivalència; per tant, pot definir-se implícitament a partir d'aquest principi. Observem que igualment podríem triar com a llei primitiva la igualtat de les masses inercial i gravitacional, i deduir-ne com a teorema el principi d'equivalència.

Tant la massa inercial com la massa gravitacional obeeixen al principi de superposició; és a dir, la massa de dues partícules (o d'un sistema de partícules) és igual a la suma de les masses de les partícules.

Força

Magnitud vectorial derivada, expressió matemàtica de la interacció entre cossos (en mecànica clàssica de partícules). És funció de la distància entre els cossos que interactuen i de certes propietats dels cossos. En marcs teòrics més amplis, pot derivar-se dels conceptes de camp i potencial. Cada tipus de força es defineix a partir de l'expressió que caracteritza la interacció corresponent.

Les forces obeeixen el principi de superposició; és a dir, quan actuen conjuntament diverses forces, la seua acció conjunta pot substituir-se per la suma o resultant de totes les forces. Les diverses forces $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$..., són descrites per les lleis de les forces (llei de la gravitació universal, llei de Hooke, llei de Coulomb...).

Sistema inercial

Concepte derivat. Es defineix com aquell que té l'origen en una partícula no sotmesa a forces i els eixos del qual no giren respecte a l'univers (respecte als estels fixos, de Newton).

Lleis de Newton del moviment

Lleis que descriuen la manera de moure's una partícula sotmesa a determinades forces, en un sistema inercial. La segona llei de Newton ($\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$), on $\boldsymbol{F}$ és la força total que actua sobre la partícula, és una llei primitiva en la mecànica de partícules newtoniana. La primera es dedueix de la segona (per a $\boldsymbol{F} = 0$, $\boldsymbol{p} = constant$), i la tercera es dedueix, per a determinats casos, de la llei de conservació de la quantitat de moviment; per tant, la primera i la tercera lleis de Newton són teoremes. Observem que en el marc teòric de la mecànica de medis continus, fins i tot la segona llei de Newton es deriva de la primera llei del moviment de Cauchy.

Lleis de conservació

Són lleis derivades, ja que poden ser deduïdes segons el teorema de Noether.

Lleis de les forces

Les lleis de les forces (de la gravitació, de Hooke, de Coulomb, etc.) són lleis primitives la naturalesa quan les escrivim relacionant l'expressió matemàtica que quantifica la interacció amb la variació de la quantitat de moviment causada per aquesta interacció. Quan les expressem en termes de força, són definicions de cada tipus de força. Si tenim en compte, però, els conceptes de camp i potencial, les lleis de les forces poden ser derivades a partir d'aquests conceptes.

Tindríem, doncs, el següent esquema simplificat d'axiomatització per a la mecànica clàssica de partícules:

- Magnituds primitives (que poden caracteritzar-se, però no definir-se, o bé poden definir-se només implícitament): longitud, temps, massa inercial, massa gravitacional, càrrega elèctrica...
- Magnituds i conceptes derivats: velocitat, acceleració, quantitat de moviment, força, moment angular, treball, energia, sistema inercial...
- Lleis primitives (axiomes): segona llei de Newton conjuntament amb les lleis de les forces (llei de la gravitació, lleis de l'electromagnetisme de Maxwell, etc.), principis de superposició de masses i forces, principi de relativitat d'Einstein (totes les lleis de la física, i no únicament les de la mecànica, són invariants per a tots els sistemes inercials), principi d'equivalència (entre un sistema accelerat i un sistema sotmès a gravitació), homogeneïtat i isotropia de l'espaitemps...
- Lleis derivades (teoremes): primera i tercera llei de Newton, proporcionalitat entre massa inercial i massa gravitacional, caiguda de tots els cossos amb la mateixa acceleració, conservació de l'energia, de la quantitat de moviment i del moment angular...

Sistemes d'unitats

La unitat de longitud i de temps (metre i segon), es defineixen com es fa habitualment en els textos. La unitat de massa inercial es defineix tradicionalment com la massa inercial del quilogram patró, encara que recentment s'ha proposat una altra definició basada en la constant de Planck.

Per a definir la unitat de força, atès que hem definit aquesta com a mesura d'una interacció, caldria partir d'alguna de les lleis de les forces. Per exemple, a partir la llei de la gravitació universal, podríem definir la unitat de força com la equivalent a $1/G$ multiplicat per la força a què es veuen sotmeses dues masses d'un quilogram separades per un metre de distància, de manera que G podria elegir-se lliurement. En aquest sistema, la llei de la gravitació universal s'expressa com a $F = Gm_gM_g/r^2$ (on m_g i M_g serien les masses gravitacionals dels cossos). Si féssim, arbitràriament, $G = 1$, quedaria $F = m_gM_g/r^2$.

En un sistema així definit, amb $G = 1$, la segona llei de Newton del moviment ens diria que l'acceleració que experimenta un cos es proporcional a la força resultant a què és sotmès i a l'acceleració que experimenta; és a dir, $F = kma$ (on m es la massa inercial del cos), com en l'equació (3). Sabent que, segons les lleis de la física, la massa gravitacional és proporcional a la massa inercial, podríem triar el sistema d'unitats de manera que la massa inercial i la massa gravitacional fossin numèricament iguals, és a dir, $m_i = m_g = m$. Aleshores, un cos o partícula de massa m sota l'atracció terrestre estaria sotmès a una força $F = mM/r^2$ (on M és ara la massa de la Terra), i experimentaria una acceleració igual a $g = F/km = M/kr^2$. Com que el valor de g podríem mesurar-lo de manera independent (per exemple, per mitjà d'un pèndol), podríem calcular experimentalment el valor de k.

Històricament, es va procedir a l'inrevés. En el sistema internacional d'unitats, el valor de k es igual a 1. Per això, la segona llei de Newton pren la forma $F = ma$. La llei de gravitació es formula com a $F = GmM/r^2$; però la igualtat entre massa inercial i massa gravitacional que aquesta formulació implicava només es va comprendre completament amb la formulació del principi d'equivalència dins de la teoria general de la relativitat d'Einstein. El que calia mesurar experimentalment era el valor de la constant G, fet que va portar a terme poc més tard Cavendish.

Sigui quina sigui la definició de les unitats o el sistema d'unitats triat, observem que les unitats de força, massa inercial i massa gravitacional estan relacionades. En el SI, atès que la segona llei de Newton pren la forma $F = ma$, podem definir la unitat de força (el newton) com la força que, aplicada a un objecte de massa 1 kg li produeix una acceleració d'1 m/s^2.

Tanmateix, el fet que, pel sistema d'unitats elegit, la unitat de força pugui definir-se a partir de l'equació $F = ma$, no implica que la força com a magnitud hagi de definir-se per mitjà d'aquesta mateixa equació. La situació és semblant a la que trobem en electromagnetisme: per comoditat, la unitat de càrrega elèctrica (el coulomb) es defineix, a partir de la fórmula $Q = It$, com la càrrega que passa en un segon per una secció de conductor quan la intensitat de corrent sigui d'un ampere; però això no implica que la càrrega sigui una magnitud derivada, ja que conceptualment es pot considerar com una propietat intrínseca d'una determinada partícula (l'electró), i per tant, una magnitud primitiva.

Bibliografia citada

ALEMAÑ BERENGUER, RAFAEL ANDRÉS, *et al.* "La axiomatización en la enseñanza secundaria: una opción didáctica", *Enseñanza de las Ciencias* (Barcelona), 1999, 17 (2), p. 343-349. (http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21585/21419).

ALONSO, M.; FINN, E. J. *Física*, Fondo Educativo Interamericano, 3 v.

ALONSO, M.; FINN, E. J. *Física*, Addison-Wesley Iberoamericana.

BUNGE, M. *Controversias en física*, Ed. Tecnos, 1983.

BURBANO DE ERCILLA, Santiago; BURBANO GARCÍA, Enrique; GARCÍA MUÑOZ, Carlos. *Física general*, 32ª edición. Ed. Tébar, 2003.

CATALÁ DE ALEMANY, Joaquín. *Física general*, 5a. ed., 1972

COELHO, R. «On the Concept of Force: How Understanding its History can Improve Physics Teaching», *Science and Education,* 2010.

COELHO, R. «Conceptual Problems in the Foundations of Mechanics». *Science and Education,* 2012.

COELHO, R. «On the Definition of Mass in Mechanics: Why Is It So Difficult?», *The Physics Teacher*, 50, 304 (2012).

FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Mattew. *The Feynman Lectures on Physics*, FEI.

FRENCH, A. P. *Mecánica newtoniana (MIT Physics Course)*, Ed. Reverté, 1978.

HESTENES, D. "Foundations of Mechanics", publicat primerament en la primera edició de *New Foundations for Classical Mechanics*, 1986. (http://geocalc.clas.asu.edu/pdf-preAdobe8/Foundations.pdf).

HEWITT, Paul G. *Física conceptual*, Pearson. Addison Wesley, 9ª ed., 2004.

LEA, Susan M; BURKE, John Robert. *Física. La naturaleza de las cosas*, vol 1. Paraninfo. Thomson Learning, 2001.

MARION, Jerry B. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*, Ed. Reverté, 1989.

MARTÍNEZ SANCHO, Vicent. *Fonaments de física,* 2 vol., Enciclopèdia Catalana.

MOORE, Thomas A. *Física. Seis ideas fundamentales*, vol 1., McGrawHill, 2ª ed., 2005.

RAÑADA, Antonio. *Dinámica clásica*, Alianza Editorial, 1990.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física*. 2 vol. Ed. CECSA.

SERWAY, Raymond A.; JEWETT, Jr., John W. *Física para ciencias e ingeniería*, vol. 1. Cengage Learning, 7a ed., 2001.

ROCHE, John. «What is momentum», *Eur J Phys*, 27: 1019–1036, 2006.

SHANKAR, Ramamurti. Fundamentals of Physics: Mechanics, Relativity, and Thermodynamics (The Open Yale Courses), Yale University Press, 2014

STRELKÓV, S. *Mecánica*, Ed. Mir. 1978.

SYMON, Keith R. *Mecánica*, Ed. Aguilar.

TIPLER, Paul A. *Física* (2 vol.), 3a ed. Ed. Reverté

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. *Physics for Scientists and Engineers*, 6a ed. W. H. Freeman and Company.

YOUNG, Hugh D. & FREEDMAN, Roger A. *Sears & Zemansky's University Physics with Modern Physics*, 14a ed, Pearson.

José García Illa

Maig 2020
http://www.justaentonacion.com/jgarciailla/index.html
https://www.justaentonacion.com/